Tentamen i Matematisk fysik FTF131

Måndagen 16 december 2013

Examinator: Henrik Johannesson, tel. 0768-237042.
Inga hjälpmedel är tillåtna på denna tentamen.

Tentamen består av fem uppgifter där varje uppgift ger maximalt 5 poäng. Uppgifterna är inte avsiktligt ordnade efter svårighetsgrad.

Strukturera Dina lösningar noggrant. **Uppställda samband skall motiveras**, gärna med en översiktlig skiss av tankegång och bärande element! Alla väsentliga steg i analys och beräkningar skall redovisas.

---

1. Beskriv hur man kan använda residykalkyl för att beräkna integralen

$$I = \int_0^\infty \frac{dx}{(x+a)^3 x^{1/2}},$$

där a är en positiv reell konstant. Beräkna I.

2. Betrakta integralekvationen

$$\varphi(x) = x + \lambda \int_a^b K(x,t)\varphi(t)\,dt$$

med den separabla kärnan $K(x,t) = xt$. Vilket är villkoret på λ för att Neumannserien som löser ekvationen ska konvergera? Antag att Du istället löser ekvationen exakt. Behövs det då något villkor på λ? Diskutera!

3. a) Rummet av kvadrat-integrerbara funktioner brukar betecknas $\mathcal{L}_w^2(a,b)$. Vad är w? Vad är a och b? Varför är $\mathcal{L}_w^2(a,b)$ intressant för en fysiker?

b) Enligt *Stone-Weierstrass teoremet* kan man spänna upp $\mathcal{L}_w^2(a,b)$ med en bas av ortogonala polynom. Illustrera detta genom att ta fram de tre första polynomen T_0, T_1, T_2 för $w = 1/\sqrt{1-x^2}$, $-a = b = 1$, och med "standardiseringen" $T_n(1) = 1, n = 0,1,2,....$ (T_0, T_1, och T_2 utgör de tre första *Chebyshevpolynomen*, mycket användbara i analys av mätdata.)

Ledning: $\int \cos^2\theta\, d\theta = \theta/2 + (1/4)\sin 2\theta + C$, $\int \cos^3\theta\, d\theta = \sin\theta - (1/3)\sin^3\theta + C$

4. Betrakta en kedja upphängd i två punkter på samma höjd. Beskriv hur Du kan bestämma kedjans form med hjälp av variationskalkyl. (Du behöver inte utföra räkningarna.)

5. Konjugatklasserna till permutationsgruppen S_n bestäms av strukturerna på cyklerna som representerar gruppelementen. T.ex., (12)(3)(4) och (14)(2)(3) i S_4 tillhör samma konjugatklass, medan (1234) och (1342) tillhör en annan konjugatklass.

a) Hur många konjugatklasser har S_4?

b) Antalet inekvivalenta irreps till en grupp är lika med antalet konjugatklasser. Använd detta resultat och Ditt svar i a) till att visa att S_4 har åtminstone en irrep av dimensionen ≥ 3.

MATEMATISK FYSIK FTF131
TENTAMEN 16/12 2013
LÖSNINGSFÖRSLAG

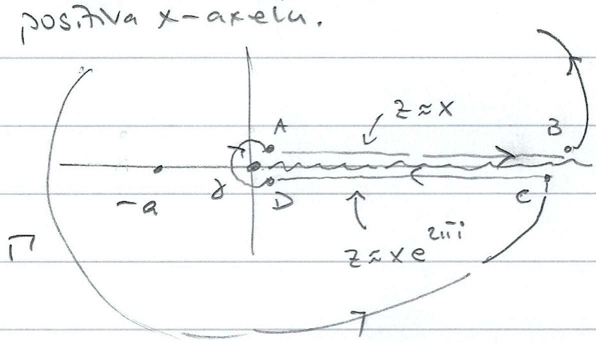
---

1) $$I = \int_0^\infty \frac{dx}{(x+a)^3 x^{1/2}}, \quad a>0$$. Komplexifiera!

$f(z) = (z+a)^{-3} z^{-1/2}$ har trippelpol i $z=-a$ med residy

$$a_{-1} = \frac{1}{(3-1)!} \lim_{z\to -a} \frac{d^2}{dz^2}\left((z+a)^3 (z+a)^{-3} z^{-1/2}\right) = -3i/8a^{5/2}$$

$|zf(z)| \xrightarrow{|z|\to\infty} 0 \Rightarrow$ Jordan är OK. Utnyttja att $f(z)$ har en grenpunkt i $z=0$. Lägg grensnitt längs positiva x-axeln.



$$\oint = \int_{AB} + \cancel{\int_{\Gamma}} + \int_{CD} + \cancel{\int_{\gamma}} = 2\pi i\left(-\frac{3i}{8a^{5/2}}\right) = \frac{3\pi}{4a^{5/2}}$$

Jordan — elementärt argument

$$\int_{AB} + \int_{CD} \xrightarrow{B,C\to\infty} \int_0^\infty \frac{dx}{(a+x)^3 x^{1/2}} + \int_\infty^0 \frac{dx}{(a+xe^{2\pi i})^3 x^{1/2}\cdot e^{\pi i}} = \frac{3\pi}{4a^{5/2}}$$

$$\Rightarrow \underbrace{(1-e^{-\pi i})}_{=2} \int_0^\infty \frac{dx}{(a+x)^3 x^{1/2}} = \frac{3\pi}{4a^{5/2}}$$

$$\Rightarrow I = \frac{1}{2}\cdot\frac{3\pi}{4a^{5/2}} = \frac{3\pi}{8a^{5/2}}$$

2) $\varphi(x) = x + \lambda \int_a^b K(x,t)\,\varphi(t)\,dt \quad , \quad K(x,t) = xt$

Tillräckligt villkor för konvergens av Neumannserien

$$\lambda \| K \| = \lambda \int_a^b x^2 dx = \lambda \tfrac{1}{3}(b^3 - a^3) < 1$$

(se physics.gu.se/~tfkhj/Neumann.pdf)

Kärnan $K(x,t)$ och problemet kan därför också lösas exakt:

$$\varphi(x) = x(1 + \lambda A) \quad , \quad A = \int_a^b t\,\varphi(t)\,dt$$

Multiplicera båda sidor med x och integrera!

$$\Rightarrow \quad A = \int_a^b x\,\varphi(x)\,dx = (1+\lambda A)\int_a^b x^2 dx = (1+\lambda A)\tfrac{1}{3}(b^3 - a^2)$$

Lös ut A och stoppa in i uttrycket för $\varphi(x)$!

$$\varphi(x) = \frac{3x}{3 - \lambda(b^3 - a^3)} \quad , \quad \lambda \neq \frac{3}{b^3 - a^3}$$

3a) Föreläsningsanteckningar! Ett så här kort svar ger ingen poäng på tentan!

b)
$$\begin{cases} T_0 = 1 \\ \quad \text{Gram-Schmidt} \\ T_1 = a + bx \Rightarrow a = 0,\ b = 1 \Rightarrow T_1 = x \\ T_2 = c + dx + ex^2 \end{cases}$$

$$\langle T_0, T_2\rangle = \int_{-1}^{1} 1\cdot \frac{c+dx+ex^2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$$

← viktfunktion $w(x) = (1-x^2)^{-1/2}$

$$\overset{\{x=\cos\theta\}}{=} -\int_{0}^{\pi} \frac{c+d\cos\theta+e\cos^2\theta}{\cancel{\sqrt{1-\cos^2\theta}}}(-\cancel{\sin\theta})\,d\theta$$

$$= c\pi + d\sin\theta\Big|_0^{\pi} - e\left(\sin\theta\cos\theta\Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi}\sin\theta(-\sin\theta)\,d\theta\right)$$

$$= c\cancel{\pi} + \tfrac{1}{2}e\cancel{\pi} = 0 \quad\Rightarrow\quad c+\frac{e}{2} = 0$$

$$\langle T_1, T_2\rangle = \int_{-1}^{1} x\cdot \frac{c+dx+ex^2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx \overset{\{x=\cos\theta\}}{=} \frac{d\pi}{2} = 0 \quad\Rightarrow\quad d=0$$

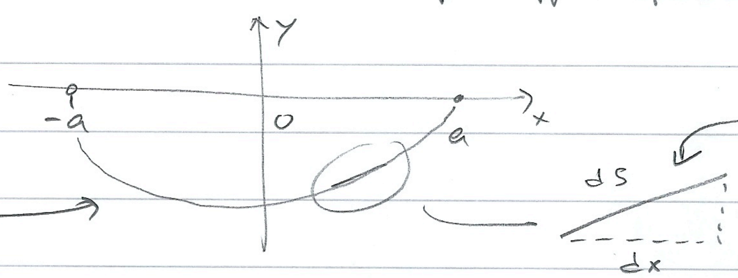
"Standardisering"

$$\Rightarrow T_2 = c+ex^2, \quad T_2(1) = c+e = 1$$

$$\Rightarrow \begin{cases} c+\frac{e}{2} = 0 \\ c+e = 1\end{cases} \Rightarrow c = -1$$

$$\Rightarrow T_2 = -1+2x^2$$

4) Betrakta en kedja av längden 2L upphängd i två punkter $x = \pm a$



Ska vara symmetrisk!

$$ds = \left((dx)^2+(dy)^2\right)^{1/2} = (1+y'^2)^{1/2}\,dx$$

Antag att kedjan har en likformig masstäthet ρ.
Minimera kedjans potentiella energi (från tyngdkraften):

$$E = -\rho g\int y\,ds = -\rho g\int_{-a}^{a} y(1+y'^2)^{1/2}\,dx \qquad (1)$$

Tvång: Kedjans längd är konstant $= 2L$.

$$J = \int ds = \int_{-a}^{a} (1+y'^2)^{1/2}\, dx = 2L \qquad (2)$$

Använd metoden med Lagrange multiplikatoren och bestäm den stationära lösningen till

$$K = E + \lambda J = \int_{-a}^{a} \underbrace{(\rho g y + \lambda)(1+y'^2)^{1/2}}_{F(y,y',\cancel{x})} dx$$

Eftersom F inte beror explicit på x så kan vi använda den enklare varianten av Eulers ekvation:

$$F - y' \frac{dF}{dy'} = \text{KONST.} = k. \qquad (3)$$

Sätt in uttrycket för $F(y,y')$. Detta ger en diff.ekv. som enkelt kan integreras. Det resulterande uttrycket ur vilket vilket vi kan lösa ut $y(x)$ innehåller tre konstanter: k (från ekv. (3)), c (integrationskonstant), och λ (Lagrange multiplikator). Dessa tre konstanter kan bestämmas från de två randvillkoren

$$\begin{cases} y(\pm a) = 0 & \text{(se figur)} \\ J = 2L & \text{(ekv. (2))} \end{cases}$$

SVAR: $y(x) = \frac{k}{\rho g}\left(\cosh\left(\frac{\rho g x}{k}\right) - \cosh\left(\frac{\rho g a}{k}\right)\right)$

Att få fram den explicita formen för $y(x)$ är litet småtrixigt. Krävs inte på tentan!

5a) Två element i S_n (dvs. två permutationer) tillhör samma konjugatklass om de har samma cykelstruktur.

Argument? −1.5p

S_4 har fem typer av cykler:

$$\begin{array}{ccccccccc} (1)(2)(3)(4) & & (12)(3)(4) & & (123)(4) & & (1234) & & (12)(34) \\ \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ 1\text{st.} & + & 6\text{st.} & + & 8\text{st.} & + & 6\text{st.} & + & 3\text{st.} \end{array} = 24$$

Dvs. FEM KONJUGATKLASSER.

b) Låt n_i = dimensionen på irrep $D^{(i)}$ (dvs. $D^{(i)}(g)$ är $n_i \times n_i$ matriser).

Vi vet från föreläsningen att

$$\sum_{i=1}^{\#\text{irreps}} n_i^2 = [S_4] = 24 \qquad ✡$$

Eftersom det finns lika många irreps som det finns konjugatklasser (dvs. fem stycken) så måste $n_i \geq 3$ för åtminstone en av dessa irreps, ty annars funkar inte ✡.

VSB.